



ce
pre
UNI

Álgebra

TEMA SUCESIONES

CICLO
PREUNIVERSITARIO

2024-1



CONTENIDO

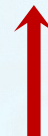
- 1. Sucesiones de Números Reales**
- 2. Subsucesiones**
- 3. Operaciones con sucesiones**
- 4. Sucesiones monótonas**
- 5. Sucesiones acotadas**
- 6. Sucesiones recurrentes**

Sucesiones de Números Reales

Definición. Se llama sucesión de números reales a toda una función:

$$x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \rightarrow x(n) = x_n$$



Término enésimo

Notación:

La sucesión se puede denotar de las formas siguientes:

$$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\{x_n\}$$

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$$

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$(x_n)$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$$

Ejemplo:

Sea la sucesión $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definida de la forma siguiente: $x_n = \frac{1}{n}$

Esta sucesión se puede ser escrita como:

$$\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\left(\frac{1}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\left\{ \frac{1}{n} \right\}$$

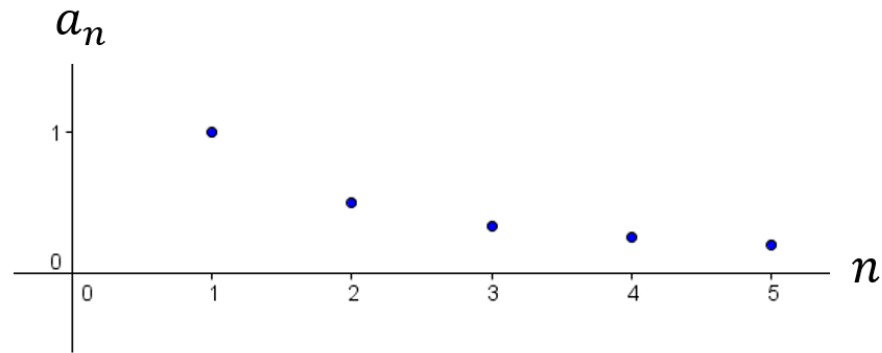
$$\left(\frac{1}{n} \right)$$

$$\left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$$

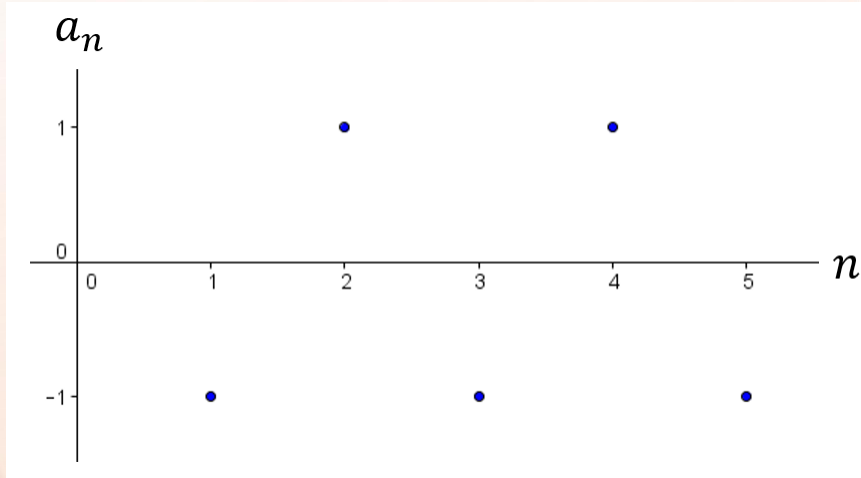
$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right)$$

Ejemplo:

$$\left\{ \frac{1}{n} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \right\}$$

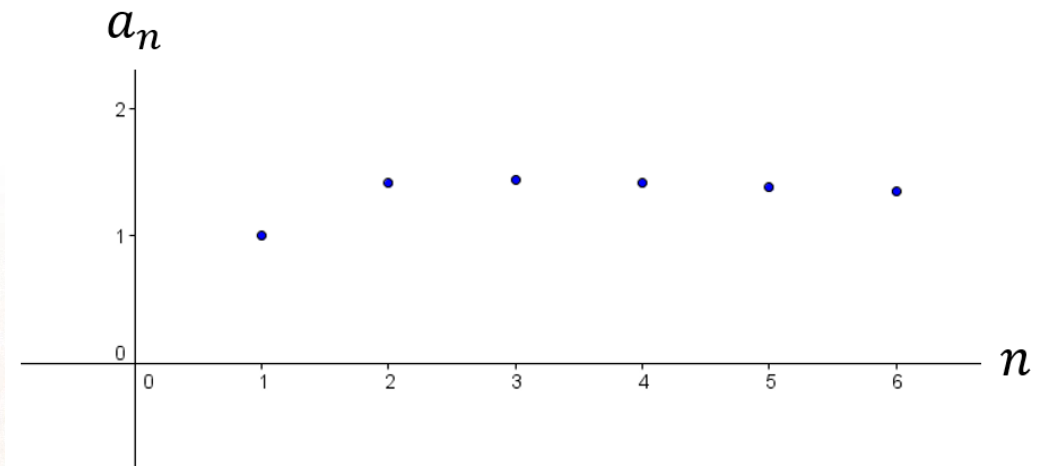


$$\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots\}$$

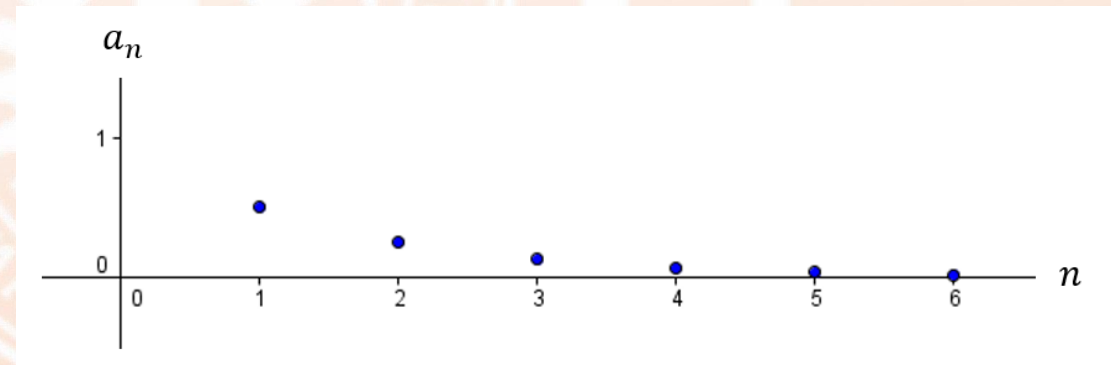


Ejemplo:

$$\{\sqrt[n]{n}\} = \{1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}, \dots\}$$



$$\{2^{-n}\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots \right\}$$



Observación

No debe confundirse la sucesión con el conjunto de sus imágenes.

Ejemplo: El conjunto conformado por las imágenes de la sucesión

$$\{1,0,0,1,0,1,0 \dots\}$$

es $\{0,1\}$.

Observación

En una sucesión se respeta el orden de los términos

Ejemplo: Las siguientes sucesiones son diferentes:

$$\{1,1,0,1,0,1,1 \dots\}$$

$$\{1,0,0,1,0,1,0 \dots\}$$

No obstante, el conjunto de sus imágenes es $\{0,1\}$.

Subsucesiones

Definición: Una **subsucesión** de una sucesión $\{x_n\}$ es una sucesión, conformada por algunos elementos de $\{x_n\}$ sin alterar el orden en el que se presentan, esto es, es una sucesión $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ cuyos términos:

$$x_{n_1}, \quad x_{n_2}, \quad x_{n_3}, \quad \dots \quad x_{n_k}, \quad \dots$$

son extraídos de $\{x_n\}$ con la siguiente condición:

$$n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \dots$$

Ejemplo: Dada la sucesión

$$\left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \dots \right\}$$

La subsucesión de términos de índice primo es:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \dots$$

Ejemplo Sea la sucesión de término enésimo $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$

Índice: n	1	2	3	4	5	6	
Término: a_n	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	
	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	

La subsucesión de términos de índice par:

$$\frac{2}{3}; \frac{4}{5}; \frac{6}{7}; \frac{8}{9}; \dots \equiv a_{n_k} = (-1)^{2k} \frac{2k}{2k+1}, k \in \mathbb{N}$$

Ejemplo: Sea la sucesión

$$\{\sqrt[n]{n}\} = \{\sqrt[1]{1}, \sqrt[2]{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}, \sqrt[6]{6}, \sqrt[7]{7}, \sqrt[8]{8}, \sqrt[9]{9}, \sqrt[10]{10}, \sqrt[11]{11}, \sqrt[12]{12} \dots\}$$

Tenemos:

Subsucesión formada por los términos de índice par

$$\{\sqrt[2n]{2n}\} = \{\sqrt[2]{2}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[6]{6}, \sqrt[8]{8}, \sqrt[10]{10}, \sqrt[12]{12} \dots\}$$

Subsucesión formada por los términos de índice múltiplo de 3

$$\{\sqrt[3n]{3n}\} = \{\sqrt[3]{3}, \sqrt[6]{6}, \sqrt[9]{9}, \sqrt[12]{12}, \sqrt[15]{15} \dots\}$$

Sucesiones monótonas

Definición: Una sucesión $\{a_n\}$ se dice **monótona** si cumple alguna de las siguientes características:

creciente $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n < a_{n+1}$

decreciente. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} < a_n$

No decreciente $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq a_{n+1}$

No creciente $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \geq a_{n+1}$

Nota:

Las sucesiones crecientes o decrecientes, también son llamadas sucesiones estrictamente monótonas.

Observación: Tener en cuenta los siguientes contenidos:

No decrecientes

crecientes

Sucesiones constantes

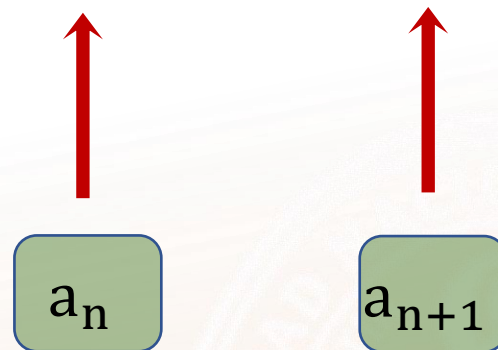
decrecientes

No crecientes

Ejemplo:

La sucesión $\{n^2\}$ es creciente, pues:

$$n^2 < (n+1)^2$$



Ejemplo: Para $a > 0$ consideremos la sucesión $\{a^n\}$

$$a > 1$$



es creciente

$$0 < a < 1$$



es decreciente

Ejemplo: ¿Determine si la sucesión $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}$ es monótona?

Resolución: Escribamos: $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $b_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$,

Vemos que: $a_n b_n = n+1 - n = 1$ por lo que: $a_n = 1/b_n$. Además:

$$b_{n+1} - b_n = \sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} - (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$$

$$= \sqrt{n+2} - \sqrt{n} > 0$$

$$\rightarrow b_{n+1} - b_n > 0$$

$$\rightarrow b_{n+1} > b_n \rightarrow 1/b_n > 1/b_{n+1}$$

$$\rightarrow a_n > a_{n+1}$$

$\rightarrow$ La sucesión es **monótona decreciente**

Ejemplo: Analizar si la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$, $a_n = \frac{n^2 + 1}{n^2 - n + 1}$ es decreciente

Resolución:

$$a_n > a_{n+1} \quad \equiv \quad \frac{n^2 + 1}{n^2 - n + 1} > \frac{(n+1)^2 + 1}{(n+1)^2 - (n+1) + 1}$$

$$\equiv \quad \frac{n^2 + 1}{n^2 - n + 1} > \frac{n^2 + 2n + 2}{n^2 + n + 1}$$

$$\equiv \quad (n^2 + 1)(n^2 + n + 1) > (n^2 + 2n + 2)(n^2 - n + 1)$$

$$\equiv \quad n(n+1) > 1$$

Esto es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$

Por tanto, $\{a_n\}$ es decreciente

Sucesiones Acotadas

Definición: Se dice que la sucesión $\{x_n\}$ es acotada superiormente si existe un número real que es mayor o igual que todos los términos de la sucesión. Es decir, cuando: $\exists b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq b$

Definición: Se dice que la sucesión $\{x_n\}$ es acotada inferiormente si existe un número real que es menor o igual que todos los términos de la sucesión. Es decir, cuando: $\exists a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : a \leq x_n$

Definición: Una sucesión $\{x_n\}$ es acotada si es acotada superiormente e inferiormente, es decir,

$$\exists a, b \in \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad \forall n \in \mathbb{N} : a \leq x_n \leq b$$

Propiedades

1) Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones:

- a) Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son acotadas inferiormente, entonces $\{a_n + b_n\}$ es una sucesión acotada inferiormente.
- b) Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son acotadas superiormente, entonces $\{a_n + b_n\}$ es una sucesión acotada superiormente.
- c) Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son acotadas, entonces $\{a_n + b_n\}$ es una sucesión acotada.
- d) Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son acotadas, entonces $\{a_n b_n\}$ es una sucesión acotada.

Propiedades

2) Se cumple las siguientes propiedades:

- a) El producto de una sucesión acotada inferiormente por un escalar positivo es una sucesión acotada inferiormente, en el caso que sea un escalar negativo es una sucesión acotada superiormente.
- b) El producto de una sucesión acotada superiormente por un escalar positivo es una sucesión acotada superiormente, en el caso que sea un escalar negativo es una sucesión acotada inferiormente.
- c) El producto de una sucesión acotada por un escalar es una sucesión acotada

3) Sean $\{a_n\}$ una sucesión. Entonces:

$\{a_n\}$ es acotada si y solo si existe $M > 0$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N} \mid a_n \mid \leq M$.

Observaciones

- 1) El producto de dos sucesiones acotadas inferiormente no necesariamente es acotada inferiormente.

$$\{a_n\} = \{n^2\} = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots\}, \quad \{b_n\} = \left\{-\frac{1}{n}\right\} = \left\{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots\right\}$$

$$\rightarrow \{a_n b_n\} = \{-n\} = \{-1, -2, -3, -4, \dots\}$$

- 2) El producto de dos sucesiones acotadas superiormente no necesariamente es acotada superiormente.

$$\{a_n\} = \{-n^2\} = \{-1^2, -2^2, -3^2, -4^2, \dots\}, \quad \{b_n\} = \left\{-\frac{1}{n}\right\} = \left\{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots\right\}$$

$$\rightarrow \{a_n b_n\} = \{n\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Ejemplo La sucesión

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{2n+1}{n} \right\}$$

esta acotada.

Esto es porque para todos $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$2 < 2 + \frac{1}{n} \leq 3$$

Cota inferior

Cota superior

Termino enésimo

Ejemplo La sucesión $\{a_n\} = \left\{ \frac{n^3}{n+1} \right\}$

es acotada inferiormente, pero no superiormente

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{n^3}{n+1} = \frac{n^3 + 1 - 1}{n+1} \\ &= \frac{(n+1)(n^2 + n + 1)}{n+1} - \frac{1}{n+1} \\ &= \boxed{n^2 + n + 1} - \boxed{\frac{1}{n+1}} \end{aligned}$$

No acotada

acotada

La diferencia es no acotada

Ejemplo Analizar si es acotada la sucesión

$$\left\{ \frac{n^2 + 2n + 5}{n^2 + 2n + 1} \right\}$$

Resolución: Tenemos

$$\frac{n^2 + 2n + 5}{n^2 + 2n + 1} = \frac{(n + 1)^2 + 4}{(n + 1)^2} = 1 + \frac{4}{(n + 1)^2}$$

De otro lado,

$$\begin{aligned} n \geq 1 &\longrightarrow 2 \leq n + 1 \longrightarrow 4 \leq (n + 1)^2 \longrightarrow 0 < \frac{4}{(n + 1)^2} \leq 1 \\ &\longrightarrow 1 < 1 + \frac{4}{(n + 1)^2} \leq 2 \end{aligned}$$

Por tanto, la sucesión es acotada

Ejemplo: La sucesión $\{\sin(n^2)\}$ es acotada

$$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \sin(n^2) \leq 1$$

Ejemplo: La sucesión $\left\{\frac{n+1}{n+2}\right\}$ es acotada.

$$\begin{aligned}\frac{n+1}{n+2} &= \frac{n+2-1}{n+2} \\ &= \frac{n+2}{n+2} - \frac{1}{n+2} \\ &= 1 - \frac{1}{n+2}\end{aligned}$$

$$3 \leq n+2 \rightarrow 0 < \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow \left\{\frac{1}{n+2}\right\} \text{ es acotada}$$

$$\rightarrow \left\{-\frac{1}{n+2}\right\} \text{ es acotada}$$

$$\rightarrow \left\{1 - \frac{1}{n+2}\right\} \text{ es acotada}$$

$$\rightarrow \left\{\frac{n+1}{n+2}\right\} \text{ es acotada}$$

Problema 230 (MATERIAL)

Marcar verdadero (V) o falso (F) en las siguientes proposiciones:

I. La sucesión $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}_{n \geq 1}$ es acotada inferiormente

II. La sucesión $\{n^2\}_{n \geq 1}$ es acotada inferiormente

III. La sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \geq 1}$ es acotada superiormente

A) VVV

B) VFF

C) VVF

D) FFF

E) FVF

Rpta: A)

Sucesiones recurrentes

Definición. Una sucesión $\{a_n\}$ se dice recurrente si el **término enésimo** a_n se define mediante una fórmula que relaciona los términos que le preceden (algunos o todos):

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}.$$



Términos que preceden a a_n

Ejemplo: La sucesión de **Fibonacci** $\{a_n\}$ se define en forma recurrente mediante:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1$$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad n \geq 3$$

Sus primeros términos son:

1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ...

Ejemplo:

$$x_1 = 2,$$

$$x_2 = 4,$$

$$x_3 = -3,$$

$$x_4 = 1,$$

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2} - \frac{x_{n-3} - x_{n-4}}{3}$$
$$n \geq 5$$

Ejemplo:

$$x_1 = 7,$$

$$x_n = \sqrt{7x_{n-1}} \quad n \geq 2$$

Ejemplo:**Sucesión aritmética**

Sea $r \in \mathbb{R}$: $x_1 = a$

$$x_n = x_{n-1} + r, \quad n \geq 2$$

Sucesión geométrica

Sea $r \in \mathbb{R}$: $x_1 = d$

$$x_n = r x_{n-1} \quad n \geq 2$$

Problema 229 (MATERIAL)

Dada la sucesión definida por:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2n - 2, & n \geq 2 \\ a_1 = 15 \end{cases}$$

Determinar a_{15}

A) 120

B) 160

C) 180

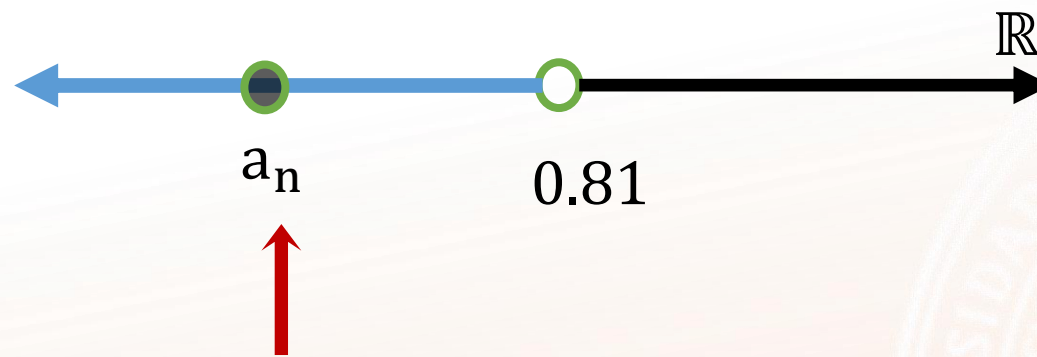
D) 225

E) 250

Rpta: D)

Ejemplo ¿ A partir de qué lugar los términos de la sucesión
 $\left\{ \frac{5}{5}; \frac{9}{10}; \frac{13}{15}; \frac{17}{20}; \dots \right\}$ son menores que 0,81 ?

Resolución. Tenemos:



¿Cómo debe ser el índice $n \in \mathbb{N}$?

Tenemos

$$\begin{aligned} a_n < 0,81 &\equiv \frac{4n + 1}{5n} < \frac{81}{100} \\ &\equiv 4n + 1 < \frac{81n}{20} \\ &\equiv 80n + 20 < 81n \end{aligned}$$

De esto resulta que

$$n > 20$$

Por tanto, son menores que 0,81 a
partir de $n = 21$

Ejercicio Dada la siguiente sucesión:

2; 1; 3; 1; 6; 2; 11; 6; x; y .

Determine la suma de los términos x, y

Ejercicio Determine el valor de ω en la sucesión numérica:

1; 1; 2; 9; 125; ω .

Problema 242 (MATERIAL)

Dada la sucesión:

$$1; 1; \frac{4}{5}; \frac{11}{17}; \frac{7}{13}; \frac{17}{37}; \dots$$

Hallar el décimo término.

A) $\frac{53}{18}$

B) $\frac{59}{71}$

C) $\frac{29}{101}$

D) $\frac{37}{85}$

E) $\frac{113}{321}$

Rpta: C)